第 38 講　数列(5)

【基礎確認事項】

[１]　数学的帰納法

□ある命題が任意の自然数 n に対して成り立つことを，無数にある自然数１つ１つについて確かめていくことは不可能である．

　そこで，先に学んだ帰納的定義と同じように，ある命題がすべての自然数 n について順々に成り立つことを確かめる一般的な方法として，**数学的帰納法**という証明法がある．その手順の１つが以下である．

自然数 n に関するある命題 $P(n)$ に関して

> ［Ⅰ］　$n=1$ のとき　命題 $P(n)$ が成り立つ．
> ［Ⅱ］　任意の自然数を k として，$n=k$ のとき命題 $P(k)$ が成り立つことを仮定すると，$n=k+1$ のときも命題 $P(k+1)$ が成り立つ．

［Ⅰ］［Ⅱ］により，$n=1$ から順に $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のときに命題 $P(n)$ が成立する．したがって，命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に関して成り立つ．

数学的帰納法は，直接証明しにくい自然数 n を含む命題を証明するのに有用である．

⇒　C&U ［1］

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　すべての自然数 n について，$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$　……①
が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(5)

1 ［1］　n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

［2］　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$$

[2]　n が自然数のとき，不等式　$n!\geqq 2^{n-1}$　が成り立つことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求め，一般項 a_n を推定せよ．

(2)　(1)で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

[2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．すべての自然数 n について　$a_n>1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(5)

n を自然数とする．$n \geqq 5$ のとき　$2^n > n^2$　……①　であることを数学的帰納法で証明したい．

$n=5$ のとき　(①の左辺)＝[アイ]，　(①の右辺)＝[ウエ] より　①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つ，つまり　$2^k > k^2$ が成り立つと仮定する．

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$

ここで　$k \geqq 5$ のとき

$2k^2-(k+1)^2=(k-$ [オ] $)^2-$ [カ] $\geqq$ [キク] >0　より

$2^{k+1} > (k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5 以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(5)

【CHECK & UP】

1 [1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=1$，(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき　①が成り立つ，すなわち

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

より，$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

[1][2]よりすべての自然数 n について①が成り立つ．

帰納法の基本問題，つまり k 番目の成立を仮定し，その次の $k+1$ 番目の成立が言えれば，1 番目が成り立つことにより 2 番目，2 番目が成り立つことにより 3 番目，と帰納的に永遠に成り立つ，つまりすべての自然数で成り立つことがわかる．
今回証明したい式は「等式」．$n=k+1$ のときの左辺を作り，そこに $n=k$ で成り立つ式を代入し計算することで $n=k+1$ のときの右辺となる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(5)

1 [1]　n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

$\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$　……①について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}$　(右辺)$=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}$　より　①は成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+2)}$$

このとき

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k(k+3)+2}{2(k+3)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+2)(k+3)}=\frac{k+1}{2(k+3)}$$　より

①は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，①はすべての自然数 n について成り立つ.

1 [2]　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$　……①　について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=2$　　(右辺)$=2\cdot 1=2$　より　①は成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)$$

このとき

$$(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot\{2(k+1)\}$$

$$=2\times(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k\times(2k+1)$$

$$=2\times 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\times(2k+1)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$$　より

①は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，①はすべての自然数 n について成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

２ [1]　n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$　すなわち　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leqq 2-\dfrac{1}{n}$　……①　について

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　(左辺)$=1$　(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k}$$

このとき

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで　$\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$　より

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$$

つまり①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［Ⅰ］　［Ⅱ］より，すべての自然数 n について　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$　が成り立つ．

２ [2]　n が自然数のとき，不等式　$n!\geqq 2^{n-1}$　が成り立つことを示せ．

$n!\geqq 2^{n-1}$　……①　について

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　(左辺)$=1$　(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$k!\geqq 2^{k-1}$

このとき　$(k+1)!=(k+1)\cdot k!\geqq (k+1)\cdot 2^{k-1}$

ここで　$(k+1)\cdot 2^{k-1}-2^k=(k+1)\cdot 2^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^{k-1}\geqq 0$　より

$(k+1)!\geqq 2^k$　　つまり　①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［Ⅰ］　［Ⅱ］より，すべての自然数 n について　$n!\geqq 2^{n-1}$　が成り立つ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

（1）　a_2，a_3，a_4，a_5 を求め，一般項 a_n を推定せよ．

（2）　(1)で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=\mathbf{-3}$　　$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=\mathbf{-5}$

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=\mathbf{-7}$　　$a_5=(-7)^2+2\cdot4\cdot(-7)-2=\mathbf{-9}$

よって　$a_n=\mathbf{-2n+1}$　……①　と推測される．

(2)　$n=1$ のとき　推測により①は明らか

$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k=-2k+1$

このとき　$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2=-2k-1$　より

$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

したがって　すべての自然数 n で　$a_n=-2n+1$　が成り立ち，推測は正しい．

3 ［2］　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．すべての自然数 n について　$a_n>1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$a_n>1$　……①について

$n=1$ のとき　$a_1=2>1$ より①は成り立つ．

$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k>1$　より　$\dfrac{1}{a_k}<1$

このとき　$a_{k+1}=2-\dfrac{1}{a_k}>2-1=1$　よって　$n=k+1$　のときも①が成り立つ．

したがって　すべての自然数 n で①が成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第38講　数列(5)

n を自然数とする．$n \geqq 5$ のとき　$2^n > n^2$　……①　であることを数学的帰納法で証明したい．

$n=5$ のとき　(①の左辺)＝**アイ**，　(①の右辺)＝**ウエ** より　①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つ，つまり　$2^k > k^2$ が成り立つと仮定する．

$2^{k+1}=2\cdot 2^k > 2\cdot k^2$

ここで　$k \geqq 5$ のとき

$2k^2-(k+1)^2=(k-$ **オ** $)^2-$ **カ** $\geqq$ **キク** >0　より

$2^{k+1}>(k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

$2^n > n^2$　……①　について

$n=5$ のとき　(①の左辺)＝$2^5=\mathbf{32}$　　(①の右辺)＝$5^2=\mathbf{25}$　より①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$2^k > k^2$

このとき

$2^{k+1}=2\cdot 2^k > 2\cdot k^2$

ここで

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-\mathbf{1})^2-\mathbf{2} \geqq 4^2-2=\mathbf{14}>0$　より

$2^{k+1}>(k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。